UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA"
CORSO DI STUDI IN INFORMATICA
ESERCITAZIONI AL CORSO DI LOGICA MATEMATICA

DIMOSTRAZIONI PER INDUZIONE

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Data una proprietà $P(n)$ sui naturali, il *principio di induzione* si esprime con la formula: $(P(0) \wedge \forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))) \rightarrow \forall n P(n)$. Esso permette di dimostrare $\forall n P(n)$ dalla dimostrazione di $P(0)$ (detta *base dell'induzione*) e dalla dimostrazione di $\forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))$ (detta *passo induttivo*).

Esercizio 1. *Dimostrare per induzione su n che per ogni n:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Soluzione.

Passo base: se $n = 0$, allora $\sum_{i=1}^{0} \frac{1}{i(i+1)} = 0 = \frac{0}{1}$.

Passo induttivo: suppongo $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ e dimostro che $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && \text{per def. sommatoria} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} && \text{per ipotesi induttiva} \\
&= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{(n+2)}
\end{aligned}$$

□

Esercizio 2. *Dimostrare per induzione su n che, per ogni n, $n^5 + 4n + 10$ è divisibile per 5.*

Soluzione.

Passo base: se $n = 0$ allora $n^5 + 4n + 10 = 10$ che è divisibile per 5.

Passo induttivo: suppongo $n^5+4n+10$ divisibile per 5 e dimostro che $(n+1)^5+4(n+1)+10$ è divisibile per 5. La potenza $(n+1)^5$ si sviluppa in $n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1$. Quindi $(n+1)^5 + 4(n+1) + 10$ è uguale a (raggruppando opportunatamente gli addendi):

$$(n^5 + 4n + 10) + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 5$$

Date: 23 – 11 – 2006.

che è divisibile per 5, essendolo tutti i suoi addendi (in particolare $n^5 + 4n + 10$ è divisibile per 5 per ipotesi induttiva).

□

Esercizio 3. *Dimostra per induzione su n che la somma degli angoli interni di un poligono convesso con n lati è $\pi(n-2)$.*

Soluzione.

Passo base: la base dell'induzione è $n = 3$, essendo il triangolo il poligono convesso con meno lati. In quasto caso sappiamo che la somma dei suoi angoli interni è $\pi = \pi(3-2)$.

Passo induttivo: sia A un poligono di $n+1$ lati, con $n \geq 3$. Siano $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ due lati del poligono con a, b, c tre vertici distinti. La diagonale $\overline{ac}$ divide il poligono A nel triangolo di vertici a, b, c e in un poligono A' di n lati. Per ipotesi induttiva la somma degli angoli interni di A' è $\pi(n-2)$, quindi la somma degli angoli interni di A è $\pi(n-2) + \pi = \pi(n+1-2)$.

□

Esercizio 4 (Torre di Hanoi)**.** *Ci sono tre aste verticali; all inizio su di una sono infilzati n dischi con un buco nel centro, di raggio decrescente dal basso verso l'alto. Bisogna spostare la pila in un'altra asta, muovendo un disco alla volta da una pila e infilzandolo in un'altra, servendosi anche della terza asta come passaggio. La condizione è che in nessun momento su nessuna pila ci sia un disco al di sotto del quale ce ne è uno di raggio minore.*

Dimostrare che per ogni $n > 0$, lo spostamento si può fare in $2^n - 1$ mosse.

Soluzione.

Passo base: se $n = 1$ allora è necessaria $1 = 2^1 - 1$ mossa.

Passo induttivo: chiamo a, b, c le tre aste e considero una pila di $n+1$ dischi su a. Dimostro che è possibile eseguire lo spostamento in $2^{n+1} - 1$ mosse. Per ipotesi induttiva posso spostare i primi n dischi sull'asta b in $2^n - 1$ mosse. Sposto allora l'ultimo disco rimasto in a sull'asta c e sempre applicando l'ipotesi induttiva sposto nuovamente gli n dischi in b sopra il disco in c in $2^n - 1$ mosse. Il totale delle mosse eseguite è $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$.

□

Esercizio 5. *Quante sono le funzioni da un insieme con n elementi in un insieme con m elementi? Dai una dimostrazione per induzione della risposta.*

Soluzione. Per individuare il numero di funzioni facciamo un pò di casi: per $n = 0$ l'unica funzione è la funzione vuota. Per $n = 1$ ci sono m funzioni, per $n = 2$ ci sono $m \times m = m^2$ funzioni, etc ... Quindi congetturiamo che il numero di funzioni sia m^n. Verifichiamolo per induzione:

Passo base: se $n = 0$ allora abbiamo solo la funzione vuota, quindi $1 = m^0$.

Passo induttivo: supponiamo che il numero di funzioni da n a m sia m^n e dimostriamo che il numero di funzioni da $n+1$ a m è m^{n+1}. Da una funzione $f : n \to m$ possiamo definire m funzioni $f : n+1 \to m$ a seconda del valore di $f(n+1)$. Dunque il numero di funzioni da $n+1$ a m sarà $m^n \times m = m^{n+1}$.

Osserva che in questo esercizio ciò su cui abbiamo fatto induzione è n, mentre m rimane un parametro della dimostrazione. □

Esercizio 6. *Quanti sono i sottoinsiemi di un insieme con n elementi? Dai una dimostrazione per induzione della risposta.*

Soluzione. Per individuare il numero di sottoinsiemi di un insieme con n elementi facciamo un pò di casi: per $n = 0$ l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è se stesso, per $n = 1$ abbiamo 2 sottoinsiemi (l'insieme vuoto e l'insieme stesso), per $n = 2$ abbiamo 4 sottoinsiemi, per $n = 3$

abbiamo 8 sottoinsiemi, etc..., quindi congetturiamo che il numero di sottoinsiemi di un insieme con n elementi è 2^n. Verifichiamolo per induzione:

Passo base: se $n = 0$ allora abbiamo il solo sottoinsieme vuoto, quindi $1 = 2^0$.

Passo induttivo: supponiamo che il numero di sottoinsiemi di un insieme di n elementi sia 2^n e dimostriamo che il numero di sottoinsiemi di un insieme A di $n+1$ elementi è 2^{n+1}. Sia $A = A' \cup \{a\}$ dove A' ha n elementi. I sottoinsiemi di A sono i sottoinsiemi di A' più i sottoinsiemi di A' uniti con $\{a\}$, quindi abbiamo $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ sottoinsiemi.

□

PRINCIPIO DELL'INDUZIONE FORTE

Data una proprietà $P(n)$ sui naturali, il *principio di induzione forte* si esprime con la formula: $\forall n(\forall m < nP(m) \to P(n)) \to \forall nP(n)$. Esso permette di dimostrare $\forall nP(n)$ dalla dimostrazione di $\forall n(\forall m < nP(m) \to P(n))$.

Rispetto al principio di induzione semplice osserva che:

- non abbiamo la distinzione *base/passo induttivo*: la base dell'induzione è infatti compresa nella formula $\forall n(\forall m < nP(m) \to P(n))$. Quando $n = 0$ infatti otteniamo $\forall m < 0P(m) \to P(0))$, che è equivalente a $P(0)$;
- l'ipotesi induttiva di $\forall n(\forall m < nP(m) \to P(n))$ (ovvero: $\forall m < nP(m)$) è più forte rispetto all'ipotesi induttiva dell'induzione semplice (che è: $P(n)$). Questo permette di semplificare alcune dimostrazioni quando si utilizza l'induzione forte invece di quella semplice.

I due principi di induzione sono comunque logicamente equivalenti, ossia dall'uno si può dimostrare l'altro e viceversa.

Esercizio 7 (Scomposizione dei fattori primi)**.** *Dimostra per induzione forte che ogni numero naturale $n > 1$ ammette una scomposizione in fattori primi.*

Soluzione. Sia n un numero > 1, suppongo che per ogni m, $1 < m < n$, m ammette una scomposizione in fattori primi (ipotesi induttiva) e dimostro che anche n ammette una scomposizione in fattori primi.

Se n è primo, allora ovviamente abbiamo l'asserto. Se n non è primo allora $n = pq$, dove $1 < p, q < n$. Per ipotesi induttiva sia p che q ammettono una scomposizione in fattori primi, quindi n ammette una scomposizione in fattori primi. □

Nelle dispense delle lezioni si trova una dimostrazione dell'esercizio 7 per induzione semplice: osserva come utilizzando l'induzione forte si ottenga una dimostrazione più semplice.

Esercizio 8. *Dimostra per induzione forte che per ogni naturale che:*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \geq 0$$

Soluzione. La dimostrazione si divide in tre casi:

(1) se $n = 0$ allora $\sum_{i=1}^{0} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} = 0$;

(2) se n è pari, per ipotesi induttiva abbiamo che:

$$\sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i-1} \frac{1}{i} \geq 0$$

quindi:

$$\sum_{i=1}^{n-2}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})\geq 0$$

essendo $\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}>0$.

(3) se n è dispari, per ipotesi induttiva abbiamo che:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}\geq 0$$

quindi:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{n})\geq 0$$

□

Esercizio 9. *Dimostra l'asserto dell'esercizio precendente utilizzando l'induzione semplice.*