COMBINATORIA

Claudia Malvenuto - Daniele A. Gewurz

Scheda di esercizi n. 3

1. Dimostrare per induzione che
$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$
Dimostrare lo stesso fatto per via combinatoria, contando in due modi i sottoinsiemi di cardinalità 2 di un insieme di cardinalità n.

2. Dimostrare che, per ogni $n \geq 1$,
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$
(Sugg.: Applicare il fatto che $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.)

3. Utilizzare il risultato precedente per dimostrare che le somme
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots$$
(sottoinsiemi di cardinalità pari) e
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$
(sottoinsiemi di cardinalità dispari) sono entrambe uguali a 2^{n-1}.

4. Si dimostrino in modo combinatorio le seguenti identità che involvono i coefficienti binomiali. Si confrontino le dimostrazioni trovate con dimostrazioni algebriche che usino la formula per il binomiale e con dimostrazioni per induzione:

   (a) $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-h}$
   (la riga n–sima del triangolo di Pascal è simmetrica rispetto al centro);

   (b) $\binom{n}{h} = \binom{n-1}{h} + \binom{n-1}{h-1}$
   (relazione ricorsiva del binomiale);

(c) $2^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}$
(somma degli elementi della riga n–sima del triangolo di Pascal);

(d) $\binom{2n}{n} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h}^2$
(somma dei quadrati degli elementi della riga n–sima del triangolo di Pascal. Suggerimento: contare in due modi diversi quanti sono i modi di fare uscire n persone da una sala che contiene n uomini ed n donne);

(e) $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$
(generalizzazione del punto precedente);

(f) $(h+1)\binom{n}{h+1} = (n-h)\binom{n}{n-h}$
(contare in due modi diversi quanti sono i sottografi di K_n isomorfi a una stella ad h punte);

(g) $(h+1)\binom{n}{h+1} = n\binom{n-1}{h}$
(contare in due modi diversi quante sono le coppie del tipo (tribù, capotribù) in un insieme di n persone);

(h) $\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} + k(n-k)$
(suggerimento: contare in due modi diversi il numero totale di coppie non ordinate di un insieme ad n elementi);

(i) $\binom{n}{r} = \sum_{k=r-1}^{n-1} \binom{k}{r-1} = \binom{r-1}{r-1} + \binom{r}{r-1} + \ldots + \binom{n-1}{r-1}$;

(j) $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.