COMBINATORIA

Claudia Malvenuto – Daniele A. Gewurz

Scheda di esercizi n. 5

1. Scrivere come prodotto di cicli disgiunti ognuna delle seguenti permutazioni, e calcolarne la parità. Per ognuna calcolare in quanti modi diversi si può scrivere come prodotto di cicli disgiunti (considerando diverse le scritture in cui i cicli compaiono in ordine diverso, o in cui lo stesso ciclo è scritto partendo da un diverso elemento).

   (a) π_1, definita da $\pi_1(1) = 3$, $\pi_1(2) = 2$, $\pi_1(3) = 7$, $\pi_1(4) = 6$, $\pi_1(5) = 4$, $\pi_1(6) = 5$, $\pi_1(7) = 1$;

   (b) $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

   (c) $\pi_3 = (1,4)(1,7)(5,6)(1,3)(1,2)(5,6)(2,3)$.

2. Dimostrare che, se σ è una qualunque permutazione, la permutazione inversa σ^{-1} ha la stessa struttura ciclica (cioè lo stesso numero di cicli per ogni lunghezza, quando scritta come prodotto di cicli disgiunti).

3. (a) Dimostrare che esistono esattamente $(n-1)!$ permutazioni cicliche distinte su $[n]$ che muovono tutti gli elementi di $[n]$ (cioè cicli di lunghezza n).

   (b) Dimostrare che, data una struttura ciclica $1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}$ (cioè con c_1 cicli di lunghezza 1, c_2 cicli di lunghezza 2 etc.), le permutazioni distinte che scritte come prodotto di cicli disgiunti hanno quella struttura ciclica sono esattamente

$$\frac{n!}{1^{c_1}2^{c_2}\dots n^{c_n}c_1!c_2!\dots c_n!}.$$

4. Si definisce *ordine* di una permutazione σ dell'insieme $[n]$ il più piccolo intero $k > 0$ tale che σ^k (cioè σ applicata k volte) sia la permutazione identica.

   Qual è l'ordine di un ciclo di lunghezza l? Qual è l'ordine di una permutazione data dal prodotto di due cicli disgiunti di lunghezza l e m? In generale, se σ si scrive in cicli disgiunti come prodotto di c_i cicli di lunghezza i ($i = 1, \ldots, n$), qual è l'ordine di σ?

5. È vero che ogni permutazione si può scrivere come prodotto di cicli di lunghezza 3? (Ad esempio $(1, 5)(2, 4) = (1, 2, 3)\ (2, 5, 4)\ (1, 3, 4)$.)

6. Dimostrare che valgono le seguenti relazioni ricorsive:

   (a) Sia a_n il numero di permutazioni π di $[n]$ tali che $\pi^2 = id$, cioè quelle composte solo di cicli di lunghezza 1 o 2 (l'identità e le permutazioni di ordine 2, dette *involuzioni*). Allora si ha $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$;

   (b) Sia $c(n, k)$ il numero di permutazioni di $[n]$ che, scritte in cicli disgiunti (compresi i cicli di lunghezza 1), sono prodotto di esattamente k cicli. Allora

   $$c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k).$$

   (c) Sia $D(n)$ il numero di permutazioni π di $[n]$ che non hanno punti fissi (cioè tali che, per ogni $a \in [n]$, $\pi(a) \neq a$). Si ha

   $$D(n) = (n-1)(D(n-1) + D(n-2)).$$