COMBINATORIA

Claudia Malvenuto – Daniele A. Gewurz

Scheda di esercizi n. 7

1. Dimostrare che il numero cromatico di qualsiasi albero con almeno due vertici è 2.

2. Sia $K(n, r)$ il grafo (detto *grafo di Kneser*) che ha come vertici tutti i sottoinsiemi di cardinalità r di $[n]$ e come archi le coppie di insiemi la cui intersezione è vuota.

   (a) Si mostri che, per ogni n, $K(n, 1)$ è isomorfo a K_n. Come è fatto $K(n, n-1)$?

   (b) Si trovi il numero cromatico di $K(5, 2)$. (È isomorfo a un grafo visto in un precedente esercizio. Quale?)

3. Si consideri una carta geografica in cui il bordo complessivo delle regioni sia un circuito euleriano (equivalentemente: si tracci una curva chiusa, che può intersecare se stessa in vari punti, e si considerino le regioni del piano così identificate). Dimostrare che questa carta si può colorare con due colori.

4. Sia H_n il grafo che ha come vertici tutte le stringhe binarie di lunghezza n, e in cui due vertici sono adiacenti se differiscono in una sola posizione (tale grafo viene chiamato ipercubo di dimensione n). Dimostrare che H_n è un grafo bipartito.

5. Un *ciclo di de Bruijn* per le stringhe binarie di lunghezza n è una collana con perle 0 o 1 le cui sottostringhe lunghe n sono tutte le stringhe binarie di lunghezza n e di più dove ciascuna appare una sola volta.

   Dimostrare che per ogni n esiste un ciclo di de Bruijn per le stringhe binarie di lunghezza n. (Suggerimento: considerare il grafo che ha come vertici le stringhe di lunghezza $n-1$, in cui due stringhe sono adiacenti se il suffisso di lunghezza $n-2$ di una è uguale al prefisso di lunghezza $n-2$ dell'altra.)

Descrivere esplicitamente un ciclo di de Bruijn per $n = 3$ e $n = 4$.

6. Se G è un grafo sconnesso, è ancora vero che G è bipartito se e solo se G non ha cicli dispari?

7. Dimostrare che il numero cromatico di G è il minimo numero di stabili che ricoprono G.

8. Siano dati un grafo G e una partizione $\mathcal{P}$ dei vertici di G in classi C_i, $i = 1, \ldots, r$ (cioè $V(G) = \bigcup_i C_i$ e gli insiemi C_i sono a due a due disgiunti). Consideriamo i grafi $G[C_i]$ indotti dagli insiemi dei vertici delle parti C_i e definiamo un funzionale ψ che dipende dalla partizione $\mathcal{P}$:
$$\psi(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{r} (1 + d(G[C_i])),$$
dove $d(G[C_i])$ è il grado del grafo $G[C_i]$.

   Dimostrare che
$$\chi(G) = \min\{\psi(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partizione dei vertici}\}.$$