COMBINATORIA

Claudia Malvenuto – Daniele A. Gewurz
Scheda di esercizi n. 8

1. Si pongano
$$N(k,k) := \max\{|V(G)| \ : \ G \text{ grafo}, \alpha(G) < k \text{ e } \omega(G) < k\}$$
e
$$R(k,k) := \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ \text{per ogni } G \text{ con } |V(G)| = n, \alpha(G) \geq k \text{ oppure } \omega(G) \geq k\}.$$
Dimostrare che $N(k,k) = R(k,k) - 1$.

2. Calcolare $R(3,3)$.

3. Supponiamo che a una cena i commensali siano seduti a un tavolo rotondo. Se vi sono dei segnaposto con scritti i loro nomi, e nessuno è seduto davanti al proprio nome, è possibile ruotare il tavolo in modo che almeno due persone siano sedute davanti al proprio nome?

4. Dimostrare per induzione il "principio dei cassetti" (detto anche principio di Dirichlet; *pigeonhole principle* in inglese): se si hanno m oggetti da distribuire tra n cassetti e $m > n$, allora in almeno un cassetto ci sarà più di un oggetto.

5. Dimostrare le seguenti varianti del principio dei cassetti.
   (a) Se $m > n$, non esistono funzioni iniettive da $[m]$ a $[n]$.
   (b) Data comunque una partizione di un insieme di cardinalità maggiore di kn in n classi, c'è una classe contenente più di k oggetti.
   (c) [Principio di Fubini] Se ogni cassetto contiene in media p oggetti, allora c'è almeno un cassetto con almeno p oggetti e almeno un cassetto con al più p oggetti.

6. Dimostrare che in ogni grafo vi sono due vertici con lo stesso grado.

7. Coloriamo i punti del piano con due colori; dimostrare che esiste un rettangolo coi vertici dello stesso colore.

8. (a) Dimostrare con il principio dei cassetti che comunque si scelgano $n+1$ interi distinti compresi tra 1 e $2n$:

i. ce ne sono due consecutivi;
ii. ce ne sono due la cui somma è $2n + 1$;
iii. ce ne sono due la cui somma è dispari;
iv. ce ne sono due primi tra loro (cioè il cui M.C.D. è 1);
v. ce ne sono due uno dei quali è multiplo dell'altro. (Suggerimento: ogni intero è della forma $2^k h$ con $k \geq 0$ e h dispari; allora, per ogni intero dispari h, si può definire un cassetto che...).

(b) Per ognuna di queste proprietà, mostrare esplicitamente un insieme di n interi in $\{1, 2, \dots, 2n\}$ che non la possiede.

9. [Teorema di Erdős-Szekeres] Sia $A = (a_1, \dots, a_n)$ una successione di n numeri reali distinti. Se $n \geq sr + 1$ allora A contiene una sottosuccessione crescente di $s+1$ termini o una sottosuccessione decrescente di $r+1$ termini (o entrambe).

   (Suggerimento: per ogni a_i, si consideri la coppia di numeri (x_i, y_i), dove x_i è la lunghezza della più lunga sottosuccessione crescente che finisce con a_i, e y_i quella della più lunga sottosuccessione decrescente che comincia con a_i. Ci interessano sr di queste coppie (x_i, y_i)...)