COMBINATORIA

Claudia Malvenuto – Daniele A. Gewurz

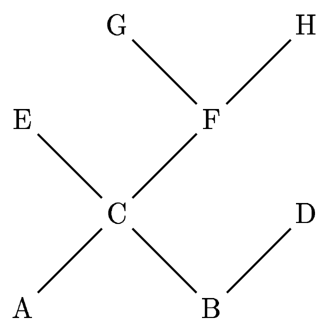
Scheda di esercizi n. 9

1. Data una qualsiasi famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $[n]$, è possibile trovare una sottofamiglia di $\mathcal{F}$ che sia di Sperner?

2. Dato un grafo G, sia $\mathcal{F}(G)$ la famiglia delle clique massimali di G. Provare che $\mathcal{F}(G)$ ha la proprietà di Sperner.

   È vero che per ogni famiglia di Sperner $\mathcal{F}$ esiste un grafo G tale che $\mathcal{F} = \mathcal{F}(G)$, ovvero che $\mathcal{F}$ sia composta dalle clique massimali di G?

3. Individuare le catene massimali e le anticatene massimali dell'insieme parzialmente ordinato descritto dal seguente diagramma di Hasse.



4. Dare un esempio di famiglia di sottoinsiemi di $[n]$ che, pur verificando la disuguaglianza LYM, non sia un'anticatena (cioè non sia di Sperner).

5. Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $[n]$ si dice *intersecante* se $\{A, B\} \in \binom{\mathcal{F}}{2} \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

   Dimostrare che per ogni famiglia intersecante $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $[n]$ si ha $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$. Esistono famiglie intersecanti di cardinalità massima? È possibile darne una descrizione esaustiva?

6. Si consideri la famiglia $\mathcal{R}$ di sottoinsiemi di $[7]$:

$$\mathcal{R} = \{\{1,2,3\},\{1,4,5\},\{1,6,7\},\{2,4,6\},\{2,5,7\},\{3,4,7\},\{3,5,6\}\}.$$

   Sia $\mathcal{F} = \{A \subseteq [7] \ : \ A \supseteq R \text{ per qualche } R \in \mathcal{R}\}$.

   Dimostrare che:

   (a) $\mathcal{R}$ è una famiglia intersecante (nota come *piano di Fano*);

   (b) $\mathcal{F}$ è una famiglia intersecante;

   (c) $|\mathcal{F}| = 2^6$ (cioè di cardinalità massima).

7. Dimostrare che nel grafo G, in cui $V(G) = 2^{[n]}$ e in cui $\{A, B\} \in E(G)$ se e solo se $A \subseteq B$ oppure $B \subseteq A$, si ha $\chi(G) = \omega(G)$.